NOUVELLE METHODE

DE CALCULER LES

LONGITUDES GEOGRAPHIQUES

D'APRES LES ECLIPSES DU SOLEIL

OU

D'APRES LES OCCULTATIONS DES ETOILES PAR LA LUNE.

PAR

MR. *CAGNOLI*,

CITOYEN DE VÉRONE, DE LA SOCIÉTÉ ITALIENNE, DES ACADEMIES DE PADOUE ET DE L'INSTITUT DE BOLOGNE, SECRETAIRE PERPETUEL DE L'ACADEMIE D'AGRICULTURE, COMMERCE ET ARTS A VÉRONE.

MEMOIRE

QUI A REMPORTÉ LE PRIX PROPOSÉ

PAR

LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE COPENHAGUE.

COPENHAGUE 1789.

Imprimé chez N. Möller & Fils, Imprimeurs du Roi.

Devise:

Et nostro sequitur de vulnere sanguis.

L'Academie Royale des Sciences de Copenhague a proposé le sujet suivant: *Desideratur methodus huc usque cognitis expeditior & facilior longitudines geographicas ex observatis eclipsibus solis & fixarum a luna occultationibus computandi.*

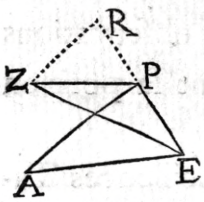
1. Pour répondre de mon mieux à cette démande, il me semble d'abord qu'on n'a à considerer que deux cas. Ou l'observation qu'il s'agit de calculer doit être comparée aux Tables de la Lune; ou elle doit être comparée à d'autres observations du même phénomene faites dans des endroits dont sa position géographique est bien connue.

2. Dans le premier cas il faut se servir des meilleures Tables lunaires qui existent, afin que leurs erreurs influent le moins qu'il est possible sur la détermination de la longitude que l'on cherche. Il paroit qu'aujourdhui ce sont celles de Mayer corrigées à Londres par M. Mason.

3. S'il s'agit d'une éclipse de Soleil, il est encore essentiel d'avoir recours aux meilleures Tables solaires, telles que celles de Mayer corrigées dernierement à Paris par M. de Lambre.

4. Mais dans le ſecond cas, on peut prendre le lieu de la Lune dans telle éphémeride que l'on veut, le comparer à deux obſervations dont chacune auroit été faite dans un endroit différent ou dans le même endroit bien connus de poſition & en déduire les erreurs du lieu adopté de la Lune, par les moyens faciles que nous propoſerons plus bas (38). On employera enſuite le lieu de la Lune corrigé de ces erreurs & reduit au moment de l'obſervation faite dans l'endroit dont on cherche ſa poſition, pour déterminer par cette même obſervation la longitude de ce lieu de la Terre.

5. Dans tous les cas il faut calculer la diſtance apparente des centres de la Lune & du Soleil ou de l'étoile pour le moment de l'obſervation. Par conſequent nous allons indiquer une méthode pour faire ce calcul que nous croyons plus facile & plus expeditive que toutes celles qu'on a données jusqu'à cette heure.



6. Soit P le pole du monde, E celui de l'écliptique, Z le renith, A le premier point d'Aries. L'angle APZ eſt l'aſcenſion droite du milieu du ciel. Cet angle eſt toujours connu; il eſt la ſomme de l'aſcenſion droite du Soleil & du temps vrai reduit en degrès ou en parties de l'équateur. PE eſt l'obliquité de l'écliptique; et PZ eſt le complement de la hauteur du pole.

7. Mais il faut obſerver que dans ces ſortes de calculs l'arc PZ doit étre augmenté de l'angle que fait la ligne verticale avec le rayon de la Terre: par ce moyen très-ſimple, qui a dèja été mis en uſage par Mayer et par M. de la Grange, on évite la

peine

peine de calculer les équations des parallaxes dans le ſphéroide aplati, comme il a été généralement démontré par M. Cagnoli aux art. 800, 801, 802 de ſa Trigonométrie.

8. Dans le triangle PEZ on connoit donc deux côtés, PE, PZ, et l'angle compris ZPE $=$ 90° $+$ APZ. Il s'agit de trouver la valeur de EZ et de l'angle PEZ. Pour cela je conduis l'arc perpendiculaire ZR ſur EP prolongé, et j'ai tang. PR $=$ tang. PZ cos. ZPR $=$ cotang. *hauteur du pole* $\times$ ſin. *asc. dr. du milieu du ciel.*

9. Connoiſſant PR, on y ajoutera PE et on aura ER. Alors dans les triangles EZR, PZR, rectangles en R on aura cos. ZR $= \frac{\text{cos. EZ}}{\text{cos. ER}} = \frac{\text{cos. PZ}}{\text{cos. PR}}$. Cette derniere équation donne cos. EZ $=$ ſin. *haut. du pole* $\times \frac{\text{cos. ER}}{\text{cos. PR}}$.

10. Maintenant que l'on connoit EZ, ER, on a cos. REZ $=$ tang. ER cot. EZ $=$ ſin. AEZ.

11. AEZ eſt ce qu'on appelle *la longitude du nonageſime*, EZ *la hauteur du nonageſime.* Voilà donc ces élémens déterminés par trois équations (8, 9, 10), lesquelles exigent la recherche de 10 logarithmes ſeulement. C'eſt 4 logarithmes de moins que par la méthode commune qu'on peut voir dans l'Aſtronomie de M. de la Lande (art. 1675. ſeconde edition).

12. Dans le calcul des trois équations (8, 9, 10) on doit obſerver les regles de ſignes. Nous allons les rapeller en peu de mots. Le ſinus ſont poſitifs ſi l'arc eſt moindre que de 180°, négatifs s'il eſt plus grand. Les coſinus ſont poſitifs dans le premier quart du cercle et dans le dernier, ils ſont négatifs dans le

ſecond quart-du cercle et dans le troiſieme. Les tangentes et les cotangentes ſont poſitives dans le premier quart-du-cercle et dans le troiſieme, négatives dans le ſecond et dans le quatrieme.

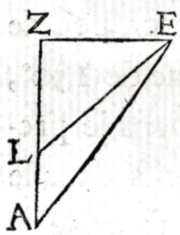
13. Ces regles obſervées, on remarquera que la longitude du nonageſime doit étre dans les ſignes aſcendans ou dans les ſignet deſcendans, ſuivant que l'aſcenſion droite du milieu du ciel ſe trouve être dans les premiers ou dans les derniers.

14. De la longitude vraie de la Lune on ſoustrait celle du nonagéſime, on a la diſtance vraie de la Lune au nonagéſime.

15. La parallaxe horizontale équatoriale de la Lune, ou l'exces de cette parallaxe ſur celle du ſoleil s'il s'agit d'une éclipſe de cet aſtre, doit ſe multiplier par le rayon de la Terre elliptique, pour avoir ſa parallaxe horizontale qui convient à l'endroit pour lequel on calcule.

16. Alors on a tout ce qui faut pour calculer la parallaxe de longitude par la formule qu'on trouvera ci-après (24, l'équation 9e).

17. Quant à la parallaxe de latitude, la formule de la Caille adoptée communement n'eſt qu'approchée, et peut induire en erreur de quelques ſecondes. Je m'en vais faire voir comment-on peut la rendre très exacte ſans augmenter en rien le travail du calcul.



18. Soit E le pole de l'écliptique, Z le zénith, L le lieu vrai de la Lune, A ſon lieu apparent; AL eſt ſa parallaxe de hauteur, (EA — EL) eſt celle de latitude dont il s'agit de trouver la valeur avec préciſion.

19. Dans

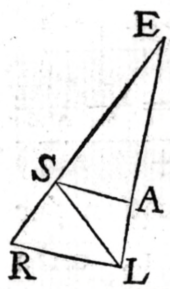
19. Dans le triangle ZEL on a par la Trigonométrie ſphérique, $\cot. EL = \frac{\cot. Z \sin. ZEL}{\sin. EZ} + \cot. EZ \cos. ZEL$. De même dans le triangle AEZ, $\cot. AE = \frac{\cot. Z \sin. AEZ}{\sin. EZ.} + \cot. EZ \cos. AEZ$. Donc $\cot. EL - \cot. AE = \frac{\cot. Z}{\sin. EZ} (\sin. ZEL - \sin. AEZ) + \cot. EZ (\cos. ZEL - \cos. AEZ)$. Mais $\cot. EL - \cot. AE = \frac{\sin. (AE - EL)}{\sin. AE \sin. EL}$, $\sin. ZEL - \sin. AEZ = - 2 \sin. \tfrac{1}{2} AEL \cos. (ZEL + \tfrac{1}{2} AEL)$, et $\cos. ZEL - \cos. AEZ = 2 \sin. \tfrac{1}{2} AEL. \sin. (ZEL + \tfrac{1}{2} AEL)$. Donc $\frac{\sin. (AE - EL)}{\sin. AE \sin. EL} = 2 \sin. \tfrac{1}{2} AEL \left(\cot. EZ \sin. \overline{ZEL + \tfrac{1}{2} AEL} - \frac{\cot. Z \cos. (ZEL + \frac{1}{2} AEL)}{\sin. EZ} \right)$. Or par la Trigonometrie, $\cot. Z = \frac{\sin. EZ \cot. AE - \cos. EZ \cos. AEZ}{\sin. AEZ}$. Subſtituant cette valeur de cot. Z dans l'équation précédente, qu'on aura multipliée auparavant par $\sin. EZ$, on trouve $\frac{\sin. (AE - EL) \sin. EZ}{\sin. AE \sin. EL} = 2 \sin. \tfrac{1}{2} AEL \left(\cos. EZ \sin. \overline{ZEL + \tfrac{1}{2} AEL} - \cos. \overline{ZEL + \tfrac{1}{2} AEL} \times \frac{\sin. EZ \cot. AE - \cos. EZ \cos. AEZ}{\sin. AEZ} \right)$ $= 2 \sin. \tfrac{1}{2} AEL \left(\cos. EZ \times \frac{\sin. (ZEL + \frac{1}{2} AEL) \sin. (ZEL + AEL) + \cos. (ZEL + \frac{1}{2} AEL) \cos. (ZEL + AEL)}{\sin. AEZ} - \frac{\sin. EZ}{\sin. AEZ.} \times \cot. AE \cos. \overline{ZEL + \tfrac{1}{2} AEL} \right) = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} AEL}{\sin. AEZ} \left(\cos. EZ \cos. \tfrac{1}{2} AEL - \sin. EZ \cot. AE \cos. \overline{ZEL + \tfrac{1}{2} AEL} \right)$ $= \frac{\sin. (AE - EL) \sin. EZ}{\sin. AE \sin. EL}$. Multipliant cette derniere équation par $\sin. AE$, et mettant $\frac{\sin. AEL}{\cos. \frac{1}{2} AEL}$ à la place de $2 \sin. \tfrac{1}{2} AEL$, on a $\frac{\sin. (AE - EL) \sin. EZ}{\sin. EL} = \frac{\sin. AEL}{\sin. AEZ} \left(\cos. EZ \sin. AE - \frac{\sin. EZ \cos. AE \cos. (ZEL + \frac{1}{2} AEL)}{\cos. \frac{1}{2} AEL} \right)$.

20. Or $\sin. AEL : \sin. AL :: \sin. A : \sin. EL :: \frac{\sin. EZ \sin. AEZ}{\sin. AZ.} : \sin. EL$. Donc. $\sin. AEL = \frac{\sin. AL \sin. EZ \sin AEZ}{\sin. EL \sin. AZ}$. Subſtituant cette valeur de sin. AEL dans l'équation précédente, et réduiſant, on a $\sin. (AE - EL) = \frac{\sin. AL}{\sin. AZ} \left(\cos. EZ \sin. AE - \frac{\sin. EZ \cos. AE \cos (ZEL + \frac{1}{2} AEL)}{\cos. \frac{1}{2} AEL} \right)$. Mais $\frac{\sin. AL}{\sin. AZ} = \sin.$ *paralaxe horizontale.* Donc sin. *parall. latitude*

tude = ſin. *par. hor.* (cos. *$h^{r.}$ du nonag.* cos. *lat. app.* ☾ — ſin. *$h^{r.}$ du non.* ſin. *lat. app.* ☾ $\times \frac{\text{cos. } (\textit{diſt. v. au nonag.} + \frac{1}{2} \textit{ parall. longit.})}{\text{cos. } \frac{1}{2} \textit{ paralaxe longitude}}$).

21. Voilà la formule rigoureuſe pour calculer la parallaxe de latitude. Mais on ne risque rien à mettre les petits arcs des parallaxes au lieu de leurs ſinus, et à faire cos. $\frac{1}{2}$ *parall. longit.* = 1; d'où l'on a *paralaxe de latitude* = *par. hor.* (cos. *h^{r} du non.* cos. *lat. app.* ☾ — ſin. *$h^{r.}$ du non.* ſin *lat. app.* ☾ cos. (*diſt. v. au non.* + $\frac{1}{2}$ *parall. longit.*)).

22. Au lieu du dernier coſinus la Caille emploie celui de la diſtance apparente au nonagéſime: voilà toute la différence de ſa formule à celle que je viens de trouver. Cette formule m'a été communiquée par M. de Lambre, qui cependant la démontre d'une autre maniere.



23. Quand on a trouvé les parallaxes, on connoit la longitude et la latitude apparentes de la Lune. Soit donc L le lieu apparent de cet aſtre, S le lieu apparent du ſoleil ou de l'étoile. Si on prend EA = ES, ou ER = EL, AL ou SR eſt la difference des latitudes apparentes des deux aſtres; d'ailleurs l'angle LES eſt la différence des longitudes apparentes, & on a AS = LES ſin. ES, LR = LES ſin. EL. Comme on peut ſe ſervir indifféremment des côtés AS, AL du petit triangle SAL conſideré comme rectiligne rectangle, ou des côtés LR, SR de l'autre petit triangle LRS, pour conclure l'hypothénuſe SL qui eſt la diſtance apparente des centres que l'on cherché (s), nous employerons à cet effet (24) la valeur moyenne entre. LR, AS, laquelle valeur eſt LES ſin. $\frac{1}{2}$ (ES + EL).

24. Voici

24. Voici maintenant le type du calcul pour déterminer la diſtance apparente des centres de deux aſtres, L, S, en ſuppoſant que la parallaxe horizontale de l'aſtre L ſoit plus grande que celle de l'aſtre S.

A = aſcenſion droite du ſoleil + temps vrai en parties de l'équateur.

B = hauteur du pôle — angle de la verticale.

Tang. C = cot. B ſin A (*).

D = C + obliquité apparente de l'écliptique

Cos. F = ſin. B $\times \frac{\text{cos. D}}{\text{cos. C}}$

Sin. G = tang. D cot. F

On prendra G dans les ſignes aſcendans ou dans les deſcendans, ſuivant que A ſera dans les premiers ou dans les derniers (13).

H = longitude vraie de l'aſtre L — G (**)

K = rayon de la Terre (paralaxe horiz. équatoriale L — par. hor. équat. S)

M = K $\times \frac{\text{ſin. F ſin. (H + M)}}{\text{cos. } \textit{latit. vraie} \text{ L}}$

N = K (cos. F cos. *lat. app.* L — ſin. F cos. $\overline{\text{H} + \frac{1}{2}\text{M}}$ ſin. *lat. app.* L)

Si la latitude apparente de l'aſtre L eſt auſtrale, ſon ſinus ſera négatif.

Lon-

*) Si A eſt > 360°, on prendra A — 360 au lieu de A.

**) On ajoutera 360° au premier terme du ſecond membre, lorſqu'il ſera plus petit que le ſecond.

Longitude apparente de l'aſtre L = longitude vraie + M

Latitude apparente de l'aſtre L = latitude vraie ± N

Le ſigne + a lieu ſi la latitude vraie eſt auſtrale, le ſigne — ſi elle eſt boréale: c'eſt le contraire lorsque N eſt négatif.

Q = différence des longitudes apparentes des aſtres L, S.

T = différence des latitudes apparentes des mêmes aſtres.

Y = ſomme des mêmes latitudes apparentes

Tang. $U = \frac{Q \cos. \frac{1}{2} Y}{T}$

Diſtance apparente des centres $= \frac{T}{\cos. U}$

25. Dans tout le calcul qui précéde on doit obſerver les regles des ſignes (12). On peut négliger les ſecondes dans les ſept premieres équations, ainſi qu'en prenant les logarithmes des lignes trigonométriques contenues dans les équations qui donnent la valeur de M et celle de N. Quand il y auroit erreur de 1′ ou de 2′ dans la valeur de F et dans celle de H, ces erreurs n'influeroient pas ſenſiblement ſur la valeur de M et de N. C'eſt un des avantages majeurs de la méthode du nonagéſime.

26. Des angles de la verticale et des rayons de la Terre, pour chaque degré de hauteur du pôle, on a des Tables; ou il eſt aiſé de les faire ſuivant le rapport qu'on adopteroit pour les axes terreſtres.

27. Comme les équations qui donnent la valeur de M et de N contiennent l'inconnüe dans le ſecond membre, on verra dans l'Exemple (49) la maniere la plus expéditive pour ſurmonter cette difficulté.

28. Le calcul (24) exige la recherche de 30 logarithmes, comme on peut le voir mieux dans l'exemple (49). La méthode de M. du Séjour (Mém. de Paris pour 1774 pag. 445) en démande 36. Celle de M. de la Grange (Ephém. de Berlin pour 1782) en réquiert 37. Mais il faut obſerver de plus, que dans ces deux dernieres méthodes il eſt indiſpenſable de tenir compte des ſecondes et même des dixiemes de ſeconde dans toute ſa ſuite du calcul, ſi l'on veut avoir la diſtance des centres bien exacte à la ſeconde; ce qui fait une perte de temps au moins double de ce qu'il en faudroit ſi on pouvoit négliger les ſecondes.

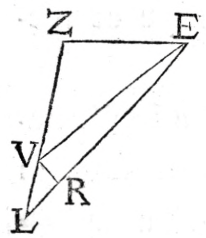
29. Dans la méthode des angles parallactiques de M. de la Lande (Aſtron. 1881) on a auſſi 37 logarithmes à chercher. Ils ne ſont que 31 à la vérité ſi on corrige la latitude par l'angle de la verticale et qu'on épargne par là les équations des parallaxes pour le ſphéroide applati. Mais comme ce moyen m'appartient, perſonne avant moi s'étant aviſée de s'appliquer à cette méthode, il eſt clair qu'on doit la conſiderer telle qu'elle a été donnée par ſon Auteur. Au ſur plus il faut encore obſerver que cette méthode eſt ſujette 1° à une multitude de regles pour former l'angle parallactique (Aſtron. 1884 à 1886), pour former l'angle d'azimut (1888), et pour ſavoir ſi la lune eſt plus ou moins élevé que le ſoleil ou l'étoile (1903 à 1913); 2° à tenir compte des ſecondes dans tout le calcul, ce qui eſt un déſavantage conſidérable; 3° elle exige qu'on connoiſſe la déclinaiſon, l'aſcenſion droite et l'angle horaire du ſoleil ou de l'étoile.

30. Quant à l'ancienne méthode du nonagésime, outre les désavantages marqués (11, 17), elle a eu jusqu'à cette heure l'embarras des équations des parrallaxes pour le sphéroide applati, dont elle n'a été délivrée par personne que je cache avant moi. Je me flatte donc d'être en droit d'avancer que ma méthode, pour arriver à bon compte à la connoissance de la distance apparente des centres, est plus facile & plus expéditive de beaucoup qu'aucune autre qui me soit connüe. Mais poursuivons, car mes petites prétentions ne s'arrêtent pas ici.

31. Si la distance apparente des centres a été calculée deux fois, c'est à dire par rapport à deux observations faites dans un ou dans deux endroits (4) dont la position est connüe, il s'agit de découvrir les erreurs des tables de la lune dans la longitude et dans la latitude. Pour cela il faut premierement comparer chaque distance des centres calculée avec la somme des demidiametres correspondans de la lune et du soleil, ou avec le demidiametre de la lune simplement, s'il s'agit de l'occultation d'une étoile. Il paroit reçu par les Astronomes (M. de la Lande 2159. et supplem. 1992), qu'il faut diminuer de 6″ à 7″ le diametre du soleil pris dans les tables, à cause de l'irradiation: de laquelle regle on doit cependant excepter les phases des parties éclairées. M. Reggio (Ephém. de Milan pour 1776 pag. 132 et suiv.) prétend qu'il faut diminuer aussi d'autant le diametre de la lune par la même cause: cependant je n'ai encore vu que cette diminution ait été adoptée, par ce qu'on croit apparemment que la lumiere de la lune, infiniment plus foible et tranquille que celle du soleil,

n'a

n'a pas produit le même effet dans la détermination de ſon diametre. Mais il eſt hors de doute que ce diamétre doit être diminué au moins de 6″ pour l'inflexion des rayons, que M. du Sejour a été le premier à remarquer (M. de la Lande 1992 à 1994), et qui ne doit ſe négliger que pour les phaſes des diſtances des cornes. D'autre part il faut augmenter ce même diametre en raiſon de la hauteur de la Lune; et à cet effet il ſuffit de prendre cette hauteur ſur un globe. Cependant ſi on n'a pas de globe, ou ſi l'on aime mieux la préciſion du calcul, je m'en vais indiquer un moyen facile pour déduire la hauteur de la lune des données obtenues par le calcul (24).



32. Soit Z le zénith, E le pôle de l'écliptique, V le lieu vrai de la lune, L le lieu apparent. Si on prend ER = EV, LR ſera la parallaxe de latitude, et l'arc VR pourra être régardé comme perpendiculaire ſur EL. D'ailleurs VL eſt *la parallaxe de hauteur* = *parallaxe horizontale* × ſin. ZL, et LEV eſt la *parallaxe de longitude* $= \frac{RV}{\text{ſin. EV}}$. Cela poſé, le petit triangle LRV rectangle en R donne tang. $L = \frac{RV}{LR} = \frac{LEV \text{ ſin. } EV}{LR}$. De plus LV : LR : : 1 : cos. L; ou *parall. horizont.* ſin. ZL : LR : : 1 : cos. L. Donc ſin. $ZL = \frac{LR}{\textit{par. hor.} \text{ cos. } L}$. Faiſant uſage des ſymboles adoptés (24) on a donc.

$$\text{tang. } \textit{angle paralactique apparent} = \frac{M \text{ cos. } \textit{Lat. vraie} ☾}{N}$$

$$\text{cos. } \textit{hauteur apparente} ☾ = \frac{N}{K \text{ cos. } \textit{ang. parallact. appar.}}$$

33. Ces deux formules ſont ſuffiſantes pour avoir la hauteur de la lune avec beaucoup plus de préciſion que par un globe.

D'ailleurs l'angle parallactique apparent ſert auſſi pour connoitre l'angle formé par le vertical & la ligne des centres, du quel angle on a béſoin, lorsqu'on doit tenir compte de l'accourciſſement produit par les réfractions ſur les phaſes méſurées avec le micrometre.

Lorsqu'on n'a pas beſoin de l'angle formé par la verticale avec la ligne des centres il vaut peut-être mieux renoncer aux formules (32) puisqu'on peut tres bien, ſans connoitre la hauteur de la lune, trouver ſon diametre augmenté en raiſon de cette même hauteur. Voici comment je démontre la formule, qui a été donnée à cet effet par Mr. Gerſtner, Aſtronome de Prague, et qui n'étoit pas à ma connoiſſance, lorsque j'ai envoyé ce memoire au concours

Soit Δ le diametre horizontal de la lune, $\Delta + \alpha$ le diametre augmenté en raiſon de la hauteur de cet aſtre. On ſcait (la Lande 1510) que $\Delta : \Delta + \alpha = \text{ſin. ZV} : \text{ſin. ZL}$. Or $\text{ſin. ZV} = \frac{\text{ſin. ZEV ſin. EV}}{\text{ſin. Z}}$ et $\text{ſin ZL} = \frac{\text{ſin ZEL. ſin EL}}{\text{ſin. Z}}$. Donc $\Delta : \Delta + \alpha = \text{ſin. ZEV. ſin. EV} : \text{ſin. ZEL. ſin. EL}$; et par conſequent

$$\Delta + \alpha = \frac{\Delta.\,\text{ſin. (H + M) cos. lat. appar. de la lune}}{\text{ſin. H. cos. lat. vraie de la lune}}.$$

Dans les cas, oû la lune eſt au nonagéſime ou tres pres, cette formule ne peut pas ſervir; car les arcs EZ, EV, EL ſe confondent et H, M ſont nuls ou à tres peu pres., mais allors la hauteur de la lune eſt connüe, puisque on a $\text{ZV} = \text{EV} - \text{EZ}$, $\text{ZL} = \text{EL} - \text{EZ}$ et parallaxe de hauteur = parallaxe de latitude. On fera donc uſage de la premiere analogie ci-deſſus.

34. Lorsqu'

34. Lorsqu'on a corrigé (31) les diametres pris dans les Tables, ſi la ſomme des demidiametres de la lune et du ſoleil ou le demidiametre de la lune ſimplement ſe trouve égalér la diſtance apparente des centres calculée, pour l'une & pour l'autre des deux obſervations, c'eſt une marque que les tables de la lune ſont exactes. Si l'égalité n'y eſt pas, on aura donc des différences: je m'en vais donner des formules bien expeditives pour conclure de ces différences les erreurs des tables de la lune dans la longitude et dans la latitude.

35. Si on différentie les deux dernieres équations (24), et que la valeur de du priſe dans l'une ſoit ſubſtituée dans l'autre, on trouvera en réduiſant, et apellant D' la diſtance apparente des centres, U' l'angle U,

$$dD' = \text{ſin. } U' \cos. \tfrac{1}{2} Y \, dQ + \cos. U' dT.$$

36. Dans cette équation dQ, dT ſont les erreurs des tables lunaires en longitude et en latitude, correſpondantes à la différence dD' qu'on aura trouvé (34). Or ces erreurs ne peuvent pas varier ſenſiblement dans l'intervalle d'une heure ni de deux: on aura donc par une ſeconde obſervation

$$dD'' = \text{ſin. } U'' \cos. \tfrac{1}{2} Y \, dQ + \cos. U'' dT.$$

37. J'ai ſuppoſé cos. $\frac{1}{2}$ Y conſtant pour les deux obſervations, ce qui n'eſt pas exact, mais la variation de ce coſinus ne peut jamais être ſenſible dans ces formules.

38. Des deux équations (35, 36) on tire

$$dQ = \frac{dD' \cos. U'' - dD'' \cos. U'}{\cos. \frac{1}{2} Y \text{ ſin. } (U' \pm U'')}$$

$$dT = \frac{dD'' \text{ ſin. } U' \pm dD' \text{ ſin. } U''}{\text{ſin. } (U' \pm U'')}$$

39. On

39. On employera les ſignes ſuperieurs lorque les deux obſervations auront été faites l'une avant et l'autre après la conjonction apparente. Quand on employera les ſignes inferieurs, on ſe ſouviendra que ſin. $(u'-u'')$ doit être négatif, ſi u'' eſt $> u'$.

40. De plus lorsque la diſtance des centres calculée eſt moindre que la diſtance obſervée, on doit faire négative l'erreur correſpondante dD' ou dD''.

41. Enfin lorsque la lune ſera plus voiſine que l'étoile ou que le ſoleil, du pôle de l'écliptique, il faudra au lieu des angles u', u'' donnés par le calcul (24) employer leurs ſuppléments.

42. Je donnerai dans cet article la démonſtration de toutes les regles (39, 40, 41), dans le cas que mon Mémoire ait le bonheur d'être couronné, et que l'Académie juge à propos qu'elle y ſoit pour l'impreſſion (*).

43. Les équations (38) ſont plus exactes, plus générales et beaucoup plus expeditives que la méthode ordinaire, pour reconnoitre les erreurs des Tables. Je dis plus exactes, parceque dans cette méthode on ſuppoſe que le mouvement apparent de la lune entre le commencement et la fin d'une éclipſe ou d'une occultation eſt rectiligne, tandis que ſa courbure eſt ordinairement aſſez ſenſible. Plus générales, parceque la méthode ordinaire n'eſt applicable qu'à deux phaſes obſervées dans un même endroit; tandis que mes équations ſont applicables auſſi à deux obſervations d'un même phénoméne, dont chacune auroit été faite

dans

(*) On trouve la démonſtration des regles (39, 40, 41) à l'article 818 de ma trigonometrie.

dans un endroit différent. Elles ſont enfin ſans comparaiſon plus expeditives que la méthode ordinaire; on n'a qu'à voir cette méthode bien détaillée dans l'Aſtronomie de M. de la Lande (1974, 1975, 1976).

44. Ayant reconnu les erreurs des Tables, par les équations (38), on corrigera en conſéquence la longitude et la latitude de la lune, et on calculera alors (24) la diſtance apparente des centres pour le moment de l'obſervation faite dans l'endroit dont on cherche la longitude géographique. Pour reduire à ce moment le lieu de la lune corrigé, il faut ſuppoſer cette longitude telle qu'on l'éſtime à peu prés. Si la diſtance des centres calculée n'eſt pas égale à la ſomme des demidiametres de la lune et du ſoleil, ou au demidiametre de la lune ſimplement, ſuivant les cas, on aura une équation de la forme (35), de laquelle il s'agit de tirer l'erreur de la longitude géographique ſuppoſée.

45. Dans ce cas les erreurs $d\textsc{q}$, $d\textsc{t}$ dépendent uniquement de l'hypothéſe qu'on a faite pour cette longitude, et ſont par conſéquent entre elles en raiſon des mouvemens horaires vrais rélatifs de la lune en longitude et en latitude. Je dis des nouvemens *vrais*, parceque dans ce cas ils ne peuvent différer qu'infiniment peu des apparents, attendu que le changement de l'hypotheſe pour la longitude géographique ne fait point varier l'angle horaire, ni par conſequent (au moins ſenſiblement) les parallaxes qui en dépendent eſſentiellement. Cela poſé, ſi on appell $\textsc{m}'$ le mouvement horaire vrai rélatif en longitude, m' ce mouvement en latitude, r le rapport $\frac{m'}{\textsc{m}'}$ entre ces nouvemens, on

aura M′ : m′ : : dQ : dT $= \frac{m' dQ}{M'} =$ r dQ. En ſubſtituant cette valeur de dT dans l'équation de la forme (35) que nous avons indiquée (44), on en tirera

$$dQ = \frac{dD'''}{\text{ſin. } U''' \cos. \frac{1}{2} Y + r \cos. U'''}$$

Après avoir déterminé par cette équation l'erreur ſur ſa différence des longitudes, on aura par le mouvement horaire rélatif la correction en temps qu'il faut faire à l'hypothèſe de la longitude terreſtre, et cette longitude ſera ainſi connüe et déterminée: ce qui eſt le but du problême.

46.) L'équation que nous venons de trouver ſert auſſi dans le cas (2) où l'on n'a qu'une ſeule obſervation. Allors on ſuppoſe que les tables de la lune ſont exactes, & que l'erreur dD′ provient entierement de l'hypothèſe qu'on a faite pour la longitude du lieu de l'obſervation. Par conſéquent la derniere équation fait connoitre l'erreur correſpondante dQ, de laquelle on tire par le mouvement horaire vrai rélatif la correction de l'hypothèſe.

47. J'ai dit (4) que pour reconnoitre les erreurs des Tables il faut avoir deux obſervations faites en lieu ou lieux connus. C'eſt en effet le moyen le plus prompt. Cependant pour reſoudre le problême des longitudes il ſuffit en général d'avoir trois obſervations, dont deux peuvent être faites, et même toutes trois, comme dans une éclipſe du ſoleil, dans le lieu dont on cherche la longitude. Ces trois obſervations donneront trois équations de la forme (35): et comme les inconnues ne ſont que trois, c'eſt-à-dire, l'erreur des tables ſur la longitude de la lune,

que

que j'appelle E, l'erreur en latitude, que j'appelle e, eſt l'erreur ſur la longitude de la lune provenant de l'hypothéſe pour la longitude terreſtre, que j'appelle ε, car l'erreur que cette hypothèſe produira ſur la latitude de la lune eſt $r\varepsilon$ (45); il eſt clair que trois équations ſuffirent pour déterminer la valeur de trois inconnües. Pour les obſervations faites dans l'endroit dont en cherche la longitude, on aura dans les équations de la forme (35), $dz = E + \varepsilon$, $dT = e + r\varepsilon$. Mais pour une obſervation qui auroit été faite en lieu connu, on aura $\varepsilon = 0$, et par conſequent $dQ = E$, $dT = e$.

48. Maintenant il ne reſte qu'à faire voire par un exemple la facilité et la celerité de ma méthode. Pour cela je choiſis l'immerſion d'Antarés obſervée à Paris par M. de la Lande le 6 Avril 1749, ainſi que l'immerſion et l'émerſion de la même étoile obſervées le même jour à Berlin. Ces phénoménes ont été calculés le même jour à Berlin. Ces phénoménes ont été calculés avec ſoin par M. Carouge, et on trouve tous les élémens et les réſultats du calcul dans l'Aſtronomie de M. de la Lande (Tom. IV. pag. 644). Je ſuppoſe que la poſition géographique de Paris eſt bien connue et qu'il s'agit de conclure celle de Berlin des obſervations que je viens de citer.

49. Le temps vrai de l'obſervation faite à Paris eſt $13^h\ 1'\ 20''$, au quel moment l'aſcenſion droite du ſoleil étoit de $15°\ 58'$. On a donc (24)

$$A = 15°\ 58' + 195°\ 20' = 211°\ 18'$$

L'angle de la verticale dans l'hypotheſe Newtonienne de $\frac{1}{230}$ d'applatiſſement eſt de $14'\ 51''$ pour la latitude $48°\ 50'$; et par conſequent

$$B = 48°\ 50'\ 14'' - 14'\ 51'' = 48°\ 35'$$

L'obliquité apparente de l'écliptique, ſelon la Table de M. de la Lande (Tom. IV. pag. 763) eſt $23°\ 28'\ 22''$. Cela poſé

 log.

log. cot. B = 9.94553	- - - - -	log. ſin. B = 9.87501
— log. ſin. A = 9.71560	—	compl. log. cos. C = 9.04138
— log. tang. C = 9.66113	—	log. cos. D = 9.99991
C = 155° 23′		log. cos. F = 9.91630
+ obliquité = 23 28		
D = 178° 51′		
F = 34° 26′	=	log. tang. D = 8.30263
		log. cot. F = 0.16395
	—	log. ſin. G = 8.46658

Comme A eſt dans les ſignes deſcendans, on a G = 181° 41′.
La Longitude vraie de la lune calculée par M. Carouge étoit 245° 31′ 42″, 0. Donc

$$H = 245° 32′ - 181° 41′ = 63° 51′$$

La latitude vraie de la lune calculée par M. Carouge étoit 3° 47′ 58″, 1 *auſtrale.* La paralaxe horizontale équatoriale 57′ 24″, 8. Mais dans ce cas parallaxe horizontale s = 0, puiſqu'Antarés n'a point de parallaxe. Donc

log. 57′ 24″, 8 = 3.53716
log. du rayon pour Paris = 9.99893
log. K = 3.53609
log. ſin. F = 9.75239
log. (K ſin. F) = 3.28848
compl. log. cos. lat. vr. ☾ = 0.00096
ſomme ou log. conſtant = 3.28944
log. ſin. ($\overline{H + M}$ ſup. à vue de 64° 10′) = 9.95427
log. M à peu près = 3.24371 = log. 29′ 13″
log. conſtant ci-deſſus = 3.28944
log. ſin. ($\overline{H + M}$ = 64° 20′) = 9.95488
log. M = 3.24432 = log. 29′ 15″, 2

log.

log. cos. F pris ci-dessus = 9.91630
log. K pris ci-dessus = 3.53609
log. N à peu prés = 3.45239 = log. 47′ 14″.
d'où log. cos. (lat. app. ☾ = 4° 35′) = 9.99861
log. 1^e partie de la valeur de N = 3.45100 = log. 47′ 5″,0
— log. (K sin. F) prix ci-dessus = 3 . 2885
log. cos. ($\overline{\text{H} + \frac{1}{2}\text{M}}$ = 64° 6′) = 9 . 6403
— log. sin. (lat. ap. ☾ = 4° 36′) = 8 . 9042
log. 2^e partie de la valeur de N = 1 . 8330 = log. 1′ 8″, 1
D'où N = 48′ 13″, 1

longit. app. ☾ = 245° 31′ 42″,0 + 29′ 15″ 2 = 246° 0′ 57″, 2.
latit. app. ☾ australe = 3° 47′ 58″, 1 + 48′ 13″, 1 = 4° 36′ 11″, 2.

En prenant le milieu entre les positions d'Antarés déterminées par Bradley, Mayer et la Caille, et réduites au 6 Avril 1749, et en tenant compte de l'aberration et de la nutation, je trouve longit. app. Antarés = 246° 16′ 19″, 2 et lat. app. Antarés = 4° 32′ 16″, 5 australe. Donc

Q = 246° 16′ 19″, 2 — 246° 0′ 57″, 2 = 15′ 22″
T = 4° 36′ 11″, 2 — 4° 32′ 16″, 5 = 3′ 54″, 7
Y = 4° 36′ 11″, 2 + 4° 32′ 16″, 5 = 9° 8′ 28″.

log. Q = 2.964731
compl. log. T = 7.629487
log. cos. ½ Y = 9.998619
log. tang. U = 0.592837 = log. tang. 75° 40′ 29″, 1
compl. log. cos. U = 0.606555
log. T pris ci-dessus = 2.370513
log. distance ap. des centr. = 2.977068 = log. 15′ 48″, 6

50. Si M. Carouge trouve 1″, 9 de plus que moi, pour la valeur de M ou de la parallaxe de longitude, et 0″, 5 de moins

que moi pour la valeur de N ou de la parallaxe de latitude, c'eſt qu'il a calculé ces parallaxes par les formules peu exactes qu'on avoit adoptées communément d'après la Caille (Elements d'Aſtronomie 658).

51. Pour pouvoir augmenter le diamétre de la lune en raiſon de ſa hauteur, nous allons calculer les formules (32).

log. M, pris (49) = 3.24432
log. cos. lat. v. ☾, pris (49) = 9.99904
compl. log. (N = 48′ 13″) = 6.53865
log. tang. angle parallactique ap. = 9.78201 = log. tang. 31° 11′
compl. log. cos. 31° 11′ = 0.06777
log. N, pris ci-deſſus = 3.46135
compl. log. K pris (49) = 6.46391
log. cos. hauteur app. de la lune = 9.99303 = log. cos. 10° 14′

52. Le demidiamétre horizontal de la lune calculé par M. Carouge = 15′ 38″, 3
augmentation pour la hauteur de 10° 14′ = + 2″, 9
diminution pour l'inflexion (31) = − 3″, 0
demidiamétre apparent de la lune = 15′ 38″, 2
diſtance ap. des centres trouvée par le calcul (49) = 15′ 48″, 6
différence ou dD′ = + 10″, 4

53. On fera les mêmes calculs (49, 51, 52) pour l'immerſion et pour l'émerſion d'Antarés obſervées à Berlin, en faiſant une hypothèſe pour la longitude géographique. M. Carouge l'a ſuppoſé de 44′ 6″ de temps par rapport à l'Obſervatoire royale de Paris. En nous tenant aux calculs de M. Carouge, nous avons pour l'immerſion dD″ = + 12″, 0; U″ = 59° 44′; et pour l'émerſion dD‴ = 5″, 8; U‴ = 58° 26′: et log. r = 8.7615.

54. On

54. On a donc trois équations de la forme (35), dans lesquelles cependant dQ et dT n'ont pas la même valeur ni la même signification pour l'observation de Paris comme pour les observations de Berlin (47). Il faut calculer prémiérement par les formules (38) la valeur numérique de dQ et de dT que les observations de Berlin donnent.

log. dD'' =	1.0792	- - - - - - -	1.0792
log. cos. U''' =	9.7189	log. fin. U''' =	9.9305
compl. log. fin. $(\overline{U'' + U'''} = 118^\circ\ 10'')$ =	0.0547	- - - - - - -	0.0547
compl. log. cos. $\frac{1}{2}$ Y pris (49) =	0.0014		1.0644 = log. $11'',60$
	0.8542 = log. $7''15$		
− log. dD''' =	0.7634	- - - - - -	+ 0.7634
log. cos. U'' =	9.7025	log. fin. U'' =	9.9364
compl. log. fin. $(U'' + U''')$ pris ci-dessus =	0.0547	- - - - - - -	0.0547
compl. log. cos. $\frac{1}{2}$ Y pris ci-dessus =	0.0044		0.7545 = log. $5''68$
− 0.5220 =	log. − $3'',33$		
dQ =	$3'',82$	dT =	$17''28$

55. Mais (47) $dQ = E + \varepsilon$, $dT = e + r\varepsilon$; et pour l'observation de Paris $dT = E$, $dQ = e$, $dD' = +10'',4$ (52), pour la quelle observation il reste à résoudre l'équation (35). On a donc les trois équations suivantes

$$E + \varepsilon = 3'',82$$
$$e + r\varepsilon = 17'',28$$
$$E \text{ fin. } U' \cos. \tfrac{1}{2} Y + e \cos. U' = 10'',4$$

desquelles il s'agit de tirer la valeur de E, e, ε.

56. On a par exemple

$$E = \frac{10'',4 - 17'',28 \cos. U' + 3'',82\ r \cos. U'}{\text{fin. } U' \cos. \frac{1}{2} Y + r \cos. U'}$$
$$\varepsilon = 3'',82 - E$$
$$e = 17'',28 - r\varepsilon$$

57. Voici

57. Voici le calcul numérique de ces équations

— log. 17'', 28 = 1.2375
log. cos. U' pris (49) = 9.3937
— 0.6312 = log. — 4'', 28
log. r, pris (53) = 8.7615
log. cos. U' pris ci-dessus = 9.3937
8.1552 = - - - - - - - - - - - - - - log. 0,0143
log. 3'' 82 = 0.5821
8.7373 = log. 0, 05
\+ 10, 40
numérateur = 6'', 17

log. cos. $\frac{1}{2}$ Y pris (49) = 9.9986
log. sin. (U' = 75° 40') = 9.9863
9.9849 = log 0,9658
dénominateur = 0,9801
log. 6'', 17 = 0.7903
compl. log. 0, 9801 = 0.0087
log. E = 0.7990 = log. 6'', 3

D'où ε = — 2'', 5 ; e = 17'', 4.

58. Il est aisé de voir, en examinant le calcul de la distance des centres fait pour Paris (49 à la fin), en quel sens doivent s'appliquer les corrections des erreurs E, e, pour faire disparoitre l'erreur dD' (52). On reconnoitra alors que la longitude de la lune, donnée par les tables est trop petit de 6'', 3 ; sa latitude trop grande de 17'',4; et comme la valeur de ε a un signe contraire à celui de E, il en resulte que la longitude de la lune donnée par l'hypothése de la longitude de Berlin est trop grande de 2'', 5. Pour diminuer de cette quantité la longitude de la lune, on trouve par le moyen du mouvement horaire 33' 13'', qu'il faut augmenter l'hypothése de 4'' $\frac{1}{2}$ de temps; ensorte que l'on a 44' 10'' $\frac{1}{2}$ pour la différence entre les méridiens des observatoires royaux de Paris et de Berlin. Voici le petit calcul que je viens d'énoncer.

compl. log. 33' 13'' = 6.7005
log. 1^{h} ou 3600'' = 3.5563
log. ε = 0.3979
0.6547 = log. 4'' $\frac{1}{2}$